

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

پاسخ مساله مانند آن است که ۷ مهره از کیسه خارج کنیم یا باید ۵ مهره سبز و ۲ مهره سفید خارج شود و یا ۶ مهره سبز و ۱ مهره سفید.

$$P = \frac{\binom{6}{5}\binom{4}{2} + \binom{6}{6}\binom{4}{1}}{\binom{10}{7}} = \frac{6 \times 6 + 1 \times 4}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3!}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲

اعداد مجموعه مورد نظر را به دو مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تقسیم می‌کنیم. برای این که در زیرمجموعه انتخاب شده مجموع اعضا زوج باشد، باید اعضای آن به یکی از روش‌های زیر انتخاب شوند.

الف) هر چهار عدد از مجموعه A انتخاب شوند که این کار به $\binom{4}{4}$ حالت امکان‌پذیر است.

ب) هر چهار عدد از مجموعه B انتخاب شوند که این کار به $\binom{4}{4}$ حالت امکان‌پذیر است.

پ) دو عدد از مجموعه A و دو عدد از مجموعه B انتخاب شوند که این کار به $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

پس تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{4} + \binom{4}{2}\binom{4}{2} = 38$$

از طرف دیگر، تعداد کل زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعه $\{1, 2, \dots, 8\}$ برابر $2^8 - 1 = 255$ است و در نتیجه احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با: $\frac{38}{255}$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

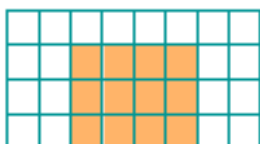
۳

در شکل ۹ خط عمودی و ۵ خط افقی وجود دارد. از تقاطع هر دو خط عمودی با هر دو خط افقی یک مستطیل ایجاد می‌شود.

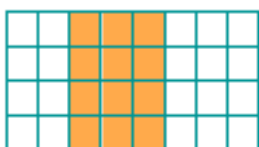
$$\binom{9}{2}\binom{5}{2} = 360$$

بنابراین تعداد مستطیل‌های موجود در شکل برابر است با:

برای رسم مستطیلی با ابعاد ۳ و ۴، کافی است دو ضلع عمود بر هم از مستطیل را انتخاب کنیم. دو ضلع دیگر خود به خود معلوم می‌شوند. برای رسم مستطیل‌هایی به صورت شکل زیر کافی است یکی از ۵ خط عمودی و یکی از دو خط افقی را انتخاب کنیم. پس: $5 \times 2 = 10$ مستطیل به این شکل وجود دارد.



همچنین برای رسم مستطیل‌هایی به شکل زیر می‌توانیم یکی از ۶ خط عمودی را انتخاب کنیم، ولی برای خطوط افقی فقط یک انتخاب داریم. پس: $6 \times 1 = 6$ مستطیل به این شکل وجود دارد.



پس کل مستطیل‌های با ابعاد ۳ و ۴ برابر ۱۶ تا است و احتمال انتخاب یکی از آن‌ها برابر $\frac{16}{360} = \frac{2}{45}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴

می‌دانیم معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است. بنابراین $\Delta > 0$ می‌باشد.

$$n^2 - 2 \cdot m > 0 \Rightarrow n^2 > 2 \cdot m$$

تمامی زوج مرتب‌های (m, n) را می‌نویسیم:

$$S = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9), (4, 9)\}$$

مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{n}{5}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $\frac{m}{5}$ است.

$$\frac{\frac{n}{5}}{\frac{m}{5}} < 3 \Rightarrow \frac{n}{m} < 3 \Rightarrow A = \{(3, 8), (4, 9)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{11}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

تعداد تمام اعداد هفت رقمی که با رقم‌های ۴ و ۵ نوشته می‌شوند برابر 2^7 است. چون هر کدام از رقم‌ها دو حالت دارند.

اکنون فرض کنید n رقم از این عدد ۴ و $7-n$ رقم از آن ۵ باشد. در این صورت، مجموع ارقام عدد برابر است با:

$$4n + 5(7-n) = 35 - n = 36 - (1+n), 0 \leq n \leq 7$$

برای این که عدد موردنظر بر ۳ بخش‌پذیر باشد باید مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد که در این صورت باید $n+1$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد و در نتیجه n می‌تواند ۲ و ۵ باشد. یعنی یا باید ۲ رقم عدد ۴ باشد یا باید ۵ رقم عدد ۴ باشد.

پس تعداد این اعداد برابر است با $\binom{7}{2} + \binom{7}{5}$ ، بنابراین احتمال بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۳ برابر است با:

$$\frac{\binom{7}{2} + \binom{7}{5}}{2^7} = \frac{21 + 21}{128} = \frac{42}{128} = \frac{21}{64}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶

$$\text{نکته: } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

نکته: منظور از احتمال «A به شرط B» که آن را با نماد $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آنکه بدانیم B رخ داده است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

اگر استقلال اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد، احتمال قهرمانی استقلال برابر $0/7$ است. یعنی $P(A|B) = 0/7$ ، از طرفی $P(B) = 0/5$

بنابراین داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0/7 = \frac{P(A \cap B)}{0/5} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/35$$

باید احتمال این را که استقلال قهرمان شود؛ ولی رقیب خود را نبرد، یعنی احتمال آنکه A رخ دهد؛ ولی B رخ ندهد را بیابیم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/6 - 0/35 = 0/25$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نکته: احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند را با $P(A \cup B)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

به کمک اطلاعات مسئله، داریم:

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{5}{8}, \quad P(A|B) = \frac{4}{5}$$

اکنون با توجه به نکات، داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{19}{24}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸

برای اینکه یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم عدد ۱ شود باید مجموع ضرایب برابر با صفر شود، یعنی:

$$\alpha + (-7) + \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 7$$

پس حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$\{(5, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 1), (1, 6)\}$$

بنابراین:

$$p \text{ (یکی از ریشه‌ها عدد ۱ باشد)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{نکته: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{نکته: } P(A' \cap B') = P(A \cup B)' \quad \text{و} \quad P(A') = 1 - P(A)$$

فرض کنیم پیشامد A، موفقیت رضا در کنکور و پیشامد B، شرکت کردن او در آزمون‌های گزینه‌دو باشد:

$$P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.25$$

$$\left\{ \begin{aligned} P(A'|B') = 0.6 &\Rightarrow \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = 0.6 \Rightarrow \frac{P(A' \cap B')}{0.75} = 0.6 \Rightarrow P(A' \cap B') = 0.45 \\ P(B) = 0.25 &\Rightarrow P(B') = 1 - 0.25 = 0.75 \end{aligned} \right.$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow 0.45 = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.55$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.55 = 0.5 + 0.25 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$$

احتمال خواسته شده همان احتمال پیشامد A به شرط B است، بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

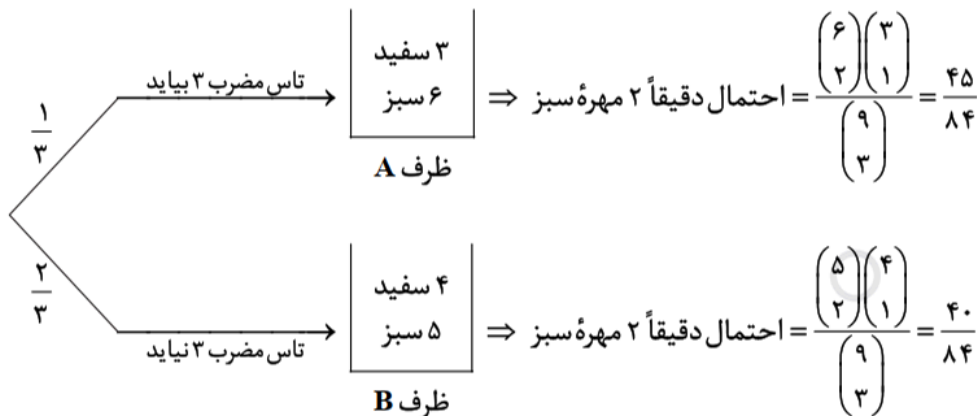
نکته: فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

برحسب اینکه تاس مضرب ۳ بیاید یا نه، دو حالت داریم:

$$\text{تاس مضرب ۳ در تاس} = \{3, 6\} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{احتمال غیرمضرب ۳ در تاس} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{دقیقاً ۲ مهره سبز}) = \frac{1}{3} \times \frac{45}{84} + \frac{2}{3} \times \frac{40}{84} = \frac{45 + 80}{3 \times 84} = \frac{125}{252}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

چون A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند، پس مطابق نکته می‌توان نوشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

اگر فرض کنیم $P(B) = x$ ، داریم:

$$\frac{7}{12} = 3x + x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{7}{12} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{6} \text{ غرق (بزرگ‌تر از ۱ است)} \end{cases}$$

احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد، معادل $P(A - B)$ است که مطابق نکته داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\text{نکته: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{نکته: } P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B), \quad P(A') = 1 - P(A)$$

برای راحتی محاسبات، $P(A)$ را برابر a ، $P(B)$ را برابر b و $P(A \cap B)$ را برابر x در نظر می‌گیریم. با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$P(A|B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2x \quad (1)$$

$$P(A|B') = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a - x}{1 - b} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a - 4x = 1 - b \quad (2)$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3x \quad (3)$$

$$4 \times (3x) - 4x = 1 - 2x \Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = 0.1 \Rightarrow b = 0.2 \Rightarrow a = 0.3$$

با توجه به معادله‌های ۱، ۲ و ۳ داریم:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{b - x}{1 - a} = \frac{0.2 - 0.1}{1 - 0.3} = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7}$$

مقدار خواسته شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

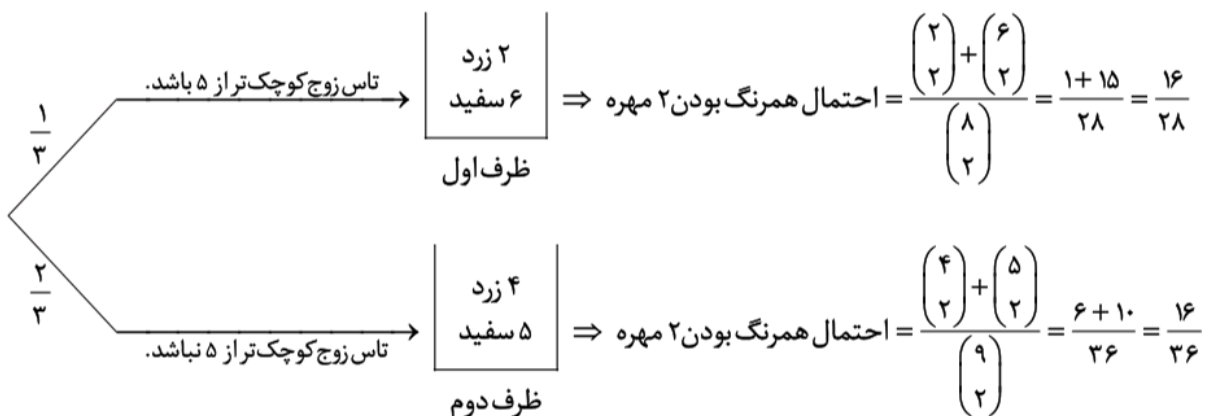
نکته: فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

برحسب اینکه تاس عددی زوج و کوچک‌تر از ۵ بیاید یا نه، دو حالت داریم:

$$\text{تاس زوج کوچک‌تر از ۵ باشد.} \Rightarrow \{2, 4\} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{تاس زوج کوچک‌تر از ۵ نباشد.} \Rightarrow \text{احتمال} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{۲ مهره هم‌رنگ}) = \frac{1}{3} \times \frac{16}{28} + \frac{2}{3} \times \frac{16}{36} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{36+56}{3 \times 7 \times 9} = \frac{92}{21 \times 9} = \frac{92}{189}$$

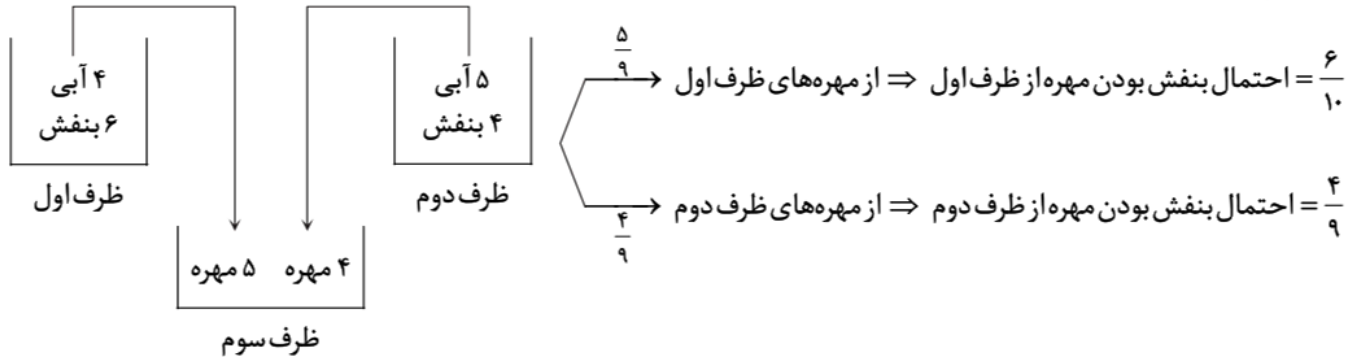
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴

نکته: فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

بر حسب اینکه مهره خارج شده از ظرف سوم جزو مهره‌هایی بوده که از ظرف اول آمده‌اند یا جزو مهره‌هایی بوده که از ظرف دوم آمده‌اند، دو حالت داریم:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{بنفش بودن مهره نهایی}) = \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{16}{81} = \frac{27+16}{81} = \frac{43}{81}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵

$$\left| \begin{array}{c} \text{قرمز } 3 \\ \text{آبی } n \end{array} \right| n(S) = \binom{n+3}{2} = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

$$n(A) = \binom{3}{2} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{3}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{6}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{7} \Rightarrow (n+3)(n+2) = 42$$

$$\frac{n \in \mathbb{N}}{7 \times 6 = 42} \rightarrow n = 4$$

پس فقط ۴ مهره آبی داریم. حال احتمال اینکه از ۳ مهره انتخابی دقیقاً ۲ مهره قرمز باشند، برابر است با:

$$\left| \begin{array}{c} \text{قرمز } 3 \\ \text{آبی } 4 \end{array} \right| n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

$$n(B) = \binom{3}{2} \binom{4}{1} = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow P(B) = \frac{12}{35}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶

نکته: فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

احتمال ریاضی بودن رشته دانش آموز در هر مدرسه را می‌یابیم:

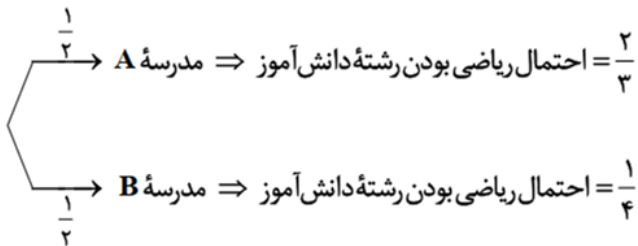
A : تعداد کل $= 3x \Rightarrow$ تعداد رشته ریاضی $= 2x \Rightarrow$ تعداد رشته تجربی $= x$

$$\text{احتمال ریاضی بودن رشته دانش آموز} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

B : تعداد کل $= 4x \Rightarrow$ تعداد رشته تجربی $= 3x \Rightarrow$ تعداد رشته ریاضی $= x$

$$\text{احتمال ریاضی بودن رشته دانش آموز} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

برحسب اینکه مدرسه A یا مدرسه B انتخاب شود، دو حالت داریم:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{ریاضی بودن رشته دانش آموز}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷

ابتدا ۳ عدد از ۶ عدد را انتخاب می‌کنیم. $\Leftrightarrow$ حالت $\binom{6}{3} = 20$

در واقع هر ۳ عدد متمایز به یک حالت اکیداً صعودی و به یک حالت اکیداً نزولی نسبت به هم قرار می‌گیرند. پس در ۴۰ حالت دنباله اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی تشکیل می‌شود.

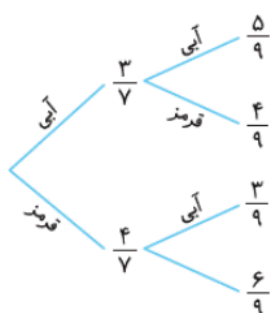
$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$P(A) = \frac{40}{216} = \frac{5}{27}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸

احتمال انتخاب مهره آبی از ظرف، برابر $\frac{3}{7}$ و احتمال انتخاب مهره قرمز از ظرف، برابر $\frac{4}{7}$ است، پس:

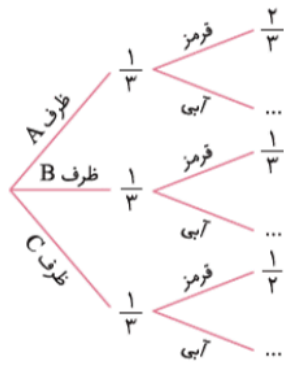


$$P = \frac{3}{7} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{9} = \frac{15+12}{63} = \frac{27}{63} = \frac{3}{7}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹

پیشامد این که مهره خروجی از ظرف A باشد را با D و پیشامد قرمز بودن مهره را با R نمایش می‌دهیم. حالا با توجه به نمودار درختی داریم:

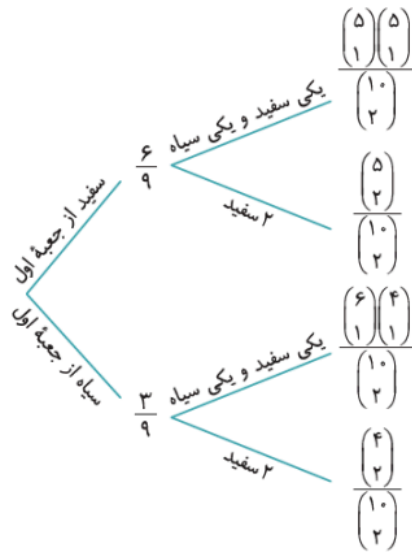


$$P(D|R) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰

مهره خارج شده از جعبه اول با احتمال $\frac{6}{9}$ سفید و با احتمال $\frac{3}{9}$ سیاه است، پس:

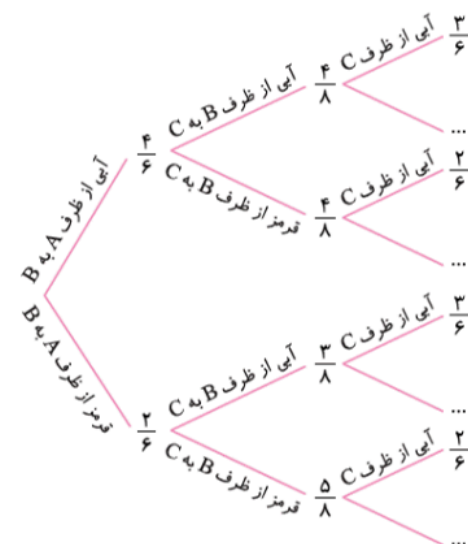


$$P = \frac{6}{9} \times \left(\frac{\binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} \right) + \frac{3}{9} \times \left(\frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} \right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{25 + 10}{45} \right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{24 + 6}{45} \right) = \frac{70 + 30}{135} = \frac{20}{27}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱

با توجه به نمودار درختی داریم:

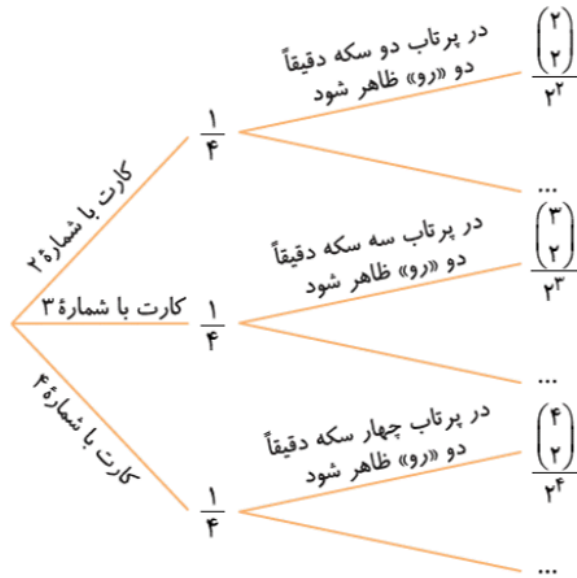


$$P = \frac{4}{6} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{6} = \frac{24}{144} + \frac{16}{144} + \frac{9}{144} + \frac{10}{144} = \frac{59}{144}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۲

احتمال انتخاب هر یک از ۴ کارت برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر کارت با شماره ۱ از کیسه بیرون آورده شود، باید یک سکه پرتاب کنیم که به حالت دقیقاً دو سکه «رو» نمی‌رسیم، پس:



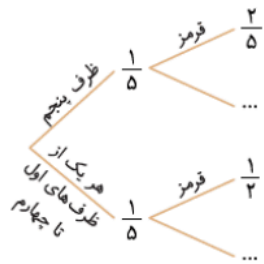
$$P = \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{2}}{2^2} + \frac{1}{4} \times \frac{\binom{3}{2}}{2^3} + \frac{1}{4} \times \frac{\binom{4}{2}}{2^4}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{8} = \frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۳

چون تعداد مهره‌های قرمز و آبی در ۴ ظرف برابر است، احتمال انتخاب مهره قرمز از هر کدام از آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس یکی از این ۴ ظرف را بررسی می‌کنیم و جواب آن شاخه را در ۴ ضرب می‌کنیم:

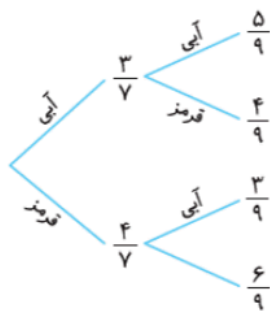


$$\Rightarrow P = \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \right) + 4 \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{12}{25}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴

احتمال انتخاب مهره آبی از ظرف، برابر $\frac{3}{7}$ و احتمال انتخاب مهره قرمز از ظرف، برابر $\frac{4}{7}$ است، پس:

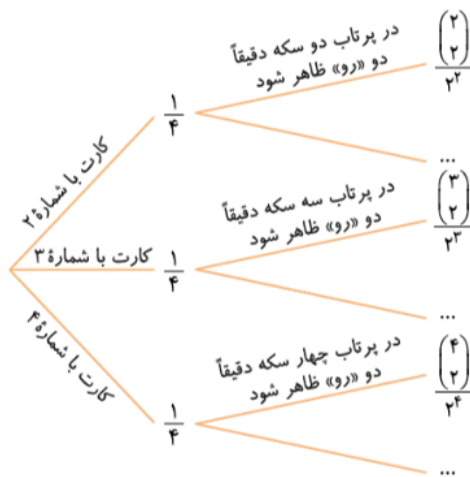


$$P = \frac{3}{7} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{9} = \frac{15 + 12}{63} = \frac{27}{63} = \frac{3}{7}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵

احتمال انتخاب هر یک از ۴ کارت برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر کارت با شماره ۱ از کیسه بیرون آورده شود، باید یک سکه پرتاب کنیم که به حالت دقیقاً دو سکه «رو» نمی‌رسیم، پس:



$$P = \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{2}}{2^2} + \frac{1}{4} \times \frac{\binom{3}{2}}{2^3} + \frac{1}{4} \times \frac{\binom{4}{2}}{2^4}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{8} = \frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶

کیسه‌ها را ببینید:



مهره خارج شده از کیسه A با احتمال $\frac{2}{5}$ قرمز و با احتمال $\frac{3}{5}$ آبی است. حالا هر حالت را بررسی می‌کنیم.

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{n+1}{n+3} + \frac{3}{5} \times \frac{n}{n+3} = \frac{17}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{(2n+2) + 3n}{5n+15} = \frac{17}{30} \Rightarrow 150n + 60 = 85n + 255$$

$$\Rightarrow 65n = 195 \Rightarrow n = 3$$

پس در کیسه دوم ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی، یعنی $3+2=5$ مهره داریم.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷

مهره‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



باید دو مهره انتخاب شده هم‌رنگ باشند، یا دو مهره انتخاب شده از بین اعداد $\{1, I\}$ یا $\{2, II\}$ یا $\{3, III\}$ یا $\{4, 4\}$ باشند:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + 3 \times \binom{3}{2} + 1}{\binom{12}{2}} = \frac{10 + 6 + 3 + 9 + 1}{66} = \frac{29}{66}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸

تعداد راه‌های انتخاب دو عدد a و b از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ برابر است با: $\binom{10}{2} = 45$. اگر چند جمله‌ای موردنظر بر $x + 1$ بخش پذیر

$$-1 + a - b - 1 = 0 \Rightarrow a = b + 2$$

باشد، مقدارش به ازای $x = -1$ برابر صفر است:

$$(3, 1)(4, 2)(5, 3)(6, 4)(7, 5)(8, 6)(9, 7)(10, 8)$$

بنابراین (a, b) یکی از هشت زوج زیر است:

در نتیجه احتمال موردنظر برابر $\frac{8}{45}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹

پاسخ تشریحی گام اول: در حالتی که یک مهره از جعبه به تصادف خارج کنیم، احتمال قرمز بودن مهره برابر است با:

$$P(\text{قرمز بودن یک مهره}) = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n+4}{1}} = \frac{n}{n+4} \Rightarrow \frac{n}{n+4} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3n = 2n + 8 \Rightarrow n = 8$$

گام دوم: در حالتی که دو مهره هم‌زمان و به تصادف از جعبه خارج کنیم، احتمال هم‌رنگ نبودن مهره‌ها برابر است با:

$$P(\text{هم‌رنگ نبودن}) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{8}{1}}{\binom{4+8}{2}} = \frac{4 \times 8}{\frac{12 \times 11}{2}} = \frac{16}{33}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰

با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

$$abc = 36$$

$$* (1, 1, 36) \rightarrow \binom{3}{1} = 3 \text{ حالت}$$

$$(1, 2, 18) \rightarrow 3! = 6 \text{ حالت}$$

$$(1, 3, 12) \rightarrow 3! = 6 \text{ حالت}$$

$$(1, 4, 9) \rightarrow 3! = 6 \text{ حالت}$$

$$* (2, 2, 9) \rightarrow \binom{3}{1} = 3 \text{ حالت}$$

$$* (3, 3, 4) \rightarrow \binom{3}{1} = 3 \text{ حالت}$$

$$(2, 3, 6) \rightarrow 3! = 6 \text{ حالت}$$

$$* (1, 6, 6) \rightarrow \binom{3}{1} = 3 \text{ حالت}$$

برای سن این ۳ نفر ۳۶ حالت وجود دارد که در ۴ حالت آن (حالت‌های * دار) سن احسان و پارسا با هم برابر است. پس داریم:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{2W} \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{10}{10} \xrightarrow{\text{سفید}} \frac{n+2}{n+3} \\ \xrightarrow{2B} \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} \xrightarrow{\text{سفید}} \frac{n}{n+3} \\ \xrightarrow{1W, 1B} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} \xrightarrow{\text{سفید}} \frac{n+1}{n+3} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P = \frac{n+2}{10(n+3)} + \frac{3n}{10(n+3)} + \frac{6(n+1)}{10(n+3)} = \frac{10n+8}{10(n+3)} = \frac{4}{5} \Rightarrow n=8$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در ابتدا باید احتمال انتخاب شدن گروه‌های دو نفری متفاوت را به دست بیاوریم و سپس در احتمال گل شدن تنها یک پنالتی ضرب کنیم.

اگر A و B انتخاب شود:

$$\left(\frac{4}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} \right) \times (0/8 \times 0/5 + 0/2 \times 0/5) = \frac{4}{100}$$

اگر C و A انتخاب شود:

$$\left(\frac{4}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{5} \right) \times (0/8 \times 0/1 + 0/2 \times 0/9) = \frac{104}{1000}$$

اگر C و B انتخاب شود:

$$\left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{5} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{9} \right) \times (0/5 \times 0/1 + 0/5 \times 0/9) = \frac{5}{100}$$

با جمع کردن حالات مختلف داریم:

$$p(x) = \frac{40 + 104 + 50}{1000} = \frac{194}{1000} = 0/194$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

اجتماع ۳ پیشامد را داریم که دوبه دو ناسازگارند. پس:

۳۳

$$A_1 = \boxed{ab} + \text{نفر } 5: 6!2!$$

$$A_2: \boxed{axb} + \text{نفر } 4: 5! \times \binom{x}{5} \times \overline{ab} 2!$$

$$A_3: a + \text{نفر } \boxed{5} + b: \overline{2!} 5!$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{6!2! + 5! \times 5 \times 2! + 5!2!}{7!} \xrightarrow{+5!} \frac{6(2) + 5(2) + 2}{7 \times 6} = \frac{24}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: چون a و b اعداد حاصل از پرتاب تاس هستند، پس عضو مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هستند.

۳۴

گام دوم: برای آن که معادله درجه دوم $x^2 - ax + b = 0$ دو ریشه طبیعی متمایز داشته باشد، باید در مرحله اول دلتای معادله مثبت و مربع

حالت‌های زیر ممکن است:

$$\Delta = a^2 - 4b \Rightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \rightarrow \text{باید مربع کامل باشد تا از زیر رادیکال خارج شود و } x \text{ عدد طبیعی بشه.}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\Delta=1} a^2 - 4b = 1 \Rightarrow a^2 = 4b + 1 \Rightarrow & \begin{cases} b=2, a=3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \\ b=6, a=5 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases} \end{cases} \\ \xrightarrow{\Delta=4} a^2 - 4b = 4 \Rightarrow a^2 = 4b + 4 \Rightarrow & \begin{cases} b=3, a=4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{cases} \\ \xrightarrow{\Delta=9} a^2 - 4b = 9 \Rightarrow a^2 = 4b + 9 \Rightarrow & \begin{cases} b=4, a=5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \\ \xrightarrow{\Delta=16} a^2 - 4b = 16 \Rightarrow a^2 = 4b + 16 \Rightarrow & \begin{cases} b=5, a=6 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

گام سوم: طبق گام دوم، پیشامد مطلوب به صورت $A = \{(3, 2), (5, 6), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$ است.

گام چهارم: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S) = 6 \times 6 = 36$ است.

گام پنجم: احتمال مطلوب برابر با $P(A) = \frac{5}{36}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی

۳۵

فضای نمونه‌ای آزمایش را به حالتی که گل اول رز آبی بوده باشد محدود می‌کنیم.

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{\text{(گل دوم رز آبی باشد)} \times \text{(گل اول رز آبی باشد)}}{\text{(گل دوم رز صورتی باشد)} \times \text{(گل اول رز آبی باشد)} + \text{(گل دوم رز آبی باشد)} \times \text{(گل اول رز آبی باشد)}}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{8}{(6+8)} \times \frac{7}{(7+7)}}{\frac{8}{(6+8)} \times \frac{7}{(7+7)} + \frac{8}{(6+8)} \times \frac{7}{(7+7)}} = \frac{\frac{56}{14 \times 14}}{\frac{56}{14 \times 14} + \frac{56}{14 \times 14}} = \frac{1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$P(R|H) = 0/9, P(R \cap H) = 0/72$$

$$P(R|H) = \frac{P(R \cap H)}{P(H)} \Rightarrow 0/9 = \frac{0/72}{P(H)} \Rightarrow P(H) = 0/8$$

احتمال پیروزی حسن ۰/۸ است.

$$P(K|H) = \frac{P(K \cap H)}{P(H)} \Rightarrow P(K \cap H) = P(H)P(K|H) = 0/8 \times 0/8 = 0/64$$

خواهیم داشت:

$$P(H - K) = P(H) - P(H \cap K) = 0/8 - 0/64 = 0/16$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

تا وقتی از رنگ بقیه مهره‌ها بی‌اطلاع هستیم احتمال قرمز بودن مهره ششم با مهره اول تفاوتی ندارد.

$$P(\text{قرمز بودن مهره ششم}) = \frac{n}{m+n} = \frac{3}{5} \Rightarrow 2n = 3m \Rightarrow n = \frac{3}{2}m$$

همچنین احتمال آبی بودن مهره چهارم و پنجم همانند احتمال آبی بودن مهره اول و دوم است.

$$P(\text{آبی بودن مهره پنجم به شرط آبی بودن مهره چهارم}) = P(\text{آبی بودن مهره چهارم}) = P$$

$$= \frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m+\frac{3}{2}m} \times \frac{m-1}{m+\frac{3}{2}m-1} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{2m}{\frac{5}{2}m} \times \frac{m-1}{\frac{5}{2}m-1} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{m-1}{\frac{5}{2}m-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3m-3 = \frac{5}{2}m-1 \Rightarrow \frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m=4 \Rightarrow n=6$$

اگر مهره اول و دوم قرمز باشند، از ۸ مهره باقی‌مانده ۴ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است. احتمال آن که مهره سوم آبی باشد، برابر است با: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

انتخاب ۲ لنگه کفش از ۱۲ لنگه باقی‌مانده منهای

حالاتی که دو لنگه یک جفت کفش باشند. انتخاب یک جفت کفش

$$\frac{\binom{7}{1} \left[\binom{12}{2} - \binom{6}{1} \right]}{\binom{14}{4}} = \frac{7 \times (66 - 6)}{1001} = \frac{7 \times 60}{1001} = \frac{60}{143}$$

انتخاب ۴ لنگه کفش

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۸

۳۹

احتمال سالم بودن قطعه A، ۹۰ درصد و قطعه B، ۸۵ درصد است.

در حالت کلی، احتمال سالم بودن قطعه را می‌یابیم:

$$P(\text{سالم بودن}) = P(A)P(\text{سالم} | A) + P(B)P(\text{سالم} | B)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{54}{100} + \frac{34}{100} = \frac{88}{100}$$

حال، احتمال قطعه A بودن به شرط سالم بودن آن را به دست می‌آوریم:

$$P(A | \text{سالم بودن}) = \frac{P(A \cap \text{سالم بودن})}{P(\text{سالم بودن})} = \frac{P(A)P(\text{سالم بودن} | A)}{P(\text{سالم بودن})} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{90}{100}}{\frac{88}{100}} = \frac{54}{88} = \frac{27}{44}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰

اگر همه کارتها را به صورت برچسبی برش دهیم، به دو کارت رنگی تبدیل می‌شوند.

کارت‌های دو رو قرمز به دو کارت قرمز، کارت‌های دو رو آبی به دو کارت آبی

و کارت‌های یک رو قرمز و یک رو آبی به یک کارت قرمز و یک کارت آبی تقسیم می‌شوند.

گویی در جعبه A، ۱۱ کارت قرمز و ۹ کارت آبی و در جعبه B، ۷ کارت قرمز و ۵ کارت آبی است.

یعنی احتمال قرمز بودن کارت در جعبه A، $\frac{11}{20}$ و در جعبه B، $\frac{7}{12}$ است.

در حالت جدید، در جعبه B، ۶ کارت (دو رو) از جعبه B و ۴ کارت (دو رو) از جعبه A موجود است.

اگر یک کارت انتخاب کنیم به احتمال $\frac{6}{10}$ از جعبه B و به احتمال $\frac{4}{10}$ از جعبه A می‌باشد.

$$\begin{array}{l} \text{جعبه A} \rightarrow \frac{4}{10} \times \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \\ \text{جعبه B} \rightarrow \frac{6}{10} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{20} \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{11}{50} + \frac{7}{20} = \frac{22+35}{100} = \frac{57}{100}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۱

در یک خانواده با n فرزند، احتمال آنکه تعداد دختران k باشد، برابر $P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ است.

$$A \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6}}{2^6} = \frac{1+15+15+1}{2^6} = \frac{1}{2}$$

$$B \Rightarrow P(B) = \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{2^6} = \frac{15+6+1}{2^6} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{16}{32}}{\frac{11}{32}} = \frac{16}{11}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۲ اگر $P(A \cap B) = x$ باشد:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} + x$$

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B) = \frac{1}{3} + x$$

$$P(B) = \frac{2}{5} P(A) \Rightarrow \frac{1}{3} + x = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} + x \right)$$

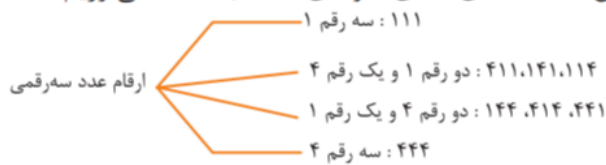
$$\Rightarrow \frac{10}{3} + 10x = \frac{20}{3} + 20x \Rightarrow 3x = \frac{20}{3} - \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{9}$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{10}{9} = \frac{16}{9}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{16}{9} = \frac{1}{9}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی ساخته شده را که همان تعداد اعضای فضای نمونه ای است، به دست می آوریم:



$$n(S) = 8$$

گام دوم: این یعنی کلاً ۸ عدد سه رقمی با ارقام مورد نظر می توان ساخت:

و از بین آنها اعداد ۱۱۴، ۱۴۴، ۴۱۴ و ۴۴۴ هم زوج هستند (بر ۲ بخش پذیرند) و هم بر ۳ بخش پذیرند که یعنی بر ۶ نیز بخش پذیرند، پس:

$$n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

گام سوم: احتمال مورد نظر برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: پیشامد A را که در آن هر دو تاس عدد اول بیایند، می نویسیم:

$$A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

گام دوم: پیشامد هر یک از گزینه‌ها را نوشته و مستقل بودن هر کدام از آن‌ها را نسبت به پیشامد A بررسی می‌کنیم:

۱

$$B_1 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \Rightarrow P(B_1) = \frac{1}{12}$$

$$A \cap B_1 = \{(2, 2)\} \Rightarrow P(A \cap B_1) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B_1)$$

۲

$$B_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(B_2) = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B_2 = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\} \Rightarrow P(A \cap B_2) = \frac{1}{12} \neq P(A)P(B_2)$$

۳

$$B_3 = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\} \Rightarrow P(B_3) = \frac{1}{9}$$

$$A \cap B_3 = \{(3, 3)\} \Rightarrow P(A \cap B_3) = \frac{1}{36} = P(A)P(B_3)$$

۴

$$B_4 = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\} \Rightarrow P(B_4) = \frac{1}{9}$$

$$A \cap B_4 = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B_4) = 0 \neq P(A)P(B_4)$$

پس فقط پیشامد ۳، مستقل از پیشامد A است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

با توجه به قانون احتمال کل داریم:

۴۵

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تاس} \rightarrow \begin{array}{l} \xrightarrow[6]{\text{اعداد ۵, ۳ بیاید}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[6]{\text{دومهره از کیسه اول هم رنگ نباشد}} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[6]{\text{مابقی اعداد}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[6]{\text{دومهره از ظرف دوم هم رنگ نباشند}} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{2}{6} \times \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}} + \frac{4}{6} \times \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{20}{36} + \frac{2}{3} \times \frac{24}{45} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{15} = \frac{5}{27} + \frac{16}{45} = \frac{25 + 48}{135} = \frac{73}{135}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\begin{array}{c} \text{قرمز آبی} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline \text{A} & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{قرمز آبی} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & x \\ \hline \text{B} & \end{array} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{A}} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{7} \\ \xrightarrow{\text{B}} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x+5} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+5} + \frac{3}{7} \right) = \frac{15}{28} \quad \frac{x}{x+5} + \frac{3}{7} = \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{9}{14} \Rightarrow \frac{9x + 45}{14(x+5)} = \frac{9x}{14} \Rightarrow 9x + 45 = 9x \Rightarrow 45 = 0 \Rightarrow x = 9 \quad \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۶

احتمال انتخاب جعبه شماره یک را x فرض می‌کنیم.

۴۷

$$x + 2x + 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جعبه اول} \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{n}{2n+1} \\ \text{جعبه دوم} \rightarrow \frac{2}{6} \times \frac{n}{2n+1} \\ \text{جعبه سوم} \rightarrow \frac{3}{6} \times \frac{n}{2n+1} \end{array} \right. \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6} \frac{n}{2n+1} + \frac{2}{6} \frac{n}{2n+1} + \frac{3}{6} \frac{n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{1+2+3}{6} \right) = \frac{7}{15} \Rightarrow n = 7$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با توجه به اینکه تعداد مهره‌های جعبه آبی دو برابر جعبه قرمز بوده و به همان نسبت هم از دو جعبه مهره خارج شده است (۲ به ۱) می‌توانیم فرض کنیم که همه مهره‌ها در

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2+2}{10+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

یک جعبه قرار دارند و کفایت تعداد کل مهره‌های سفید هر دو جعبه را به مجموع مهره‌های هر دو جعبه تقسیم کنیم:

۴۸

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز A} \rightarrow \frac{5}{9} \left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز B} \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز A} \rightarrow \frac{5}{9} \\ \text{آبی A} \rightarrow \frac{4}{9} \end{array} \right. \\ \text{آبی B} \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز A} \rightarrow \frac{4}{9} \\ \text{آبی A} \rightarrow \frac{5}{9} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{آبی A} \rightarrow \frac{4}{9} \left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز B} \rightarrow \frac{4}{10} \left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز A} \rightarrow \frac{6}{9} \\ \text{آبی A} \rightarrow \frac{3}{9} \end{array} \right. \\ \text{آبی B} \rightarrow \frac{6}{10} \left\{ \begin{array}{l} \text{قرمز A} \rightarrow \frac{5}{9} \\ \text{آبی A} \rightarrow \frac{4}{9} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$a = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{8}{45} = \frac{25+16}{90} = \frac{41}{90}$$

$$b = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{4}{15} = \frac{25+24}{90} = \frac{49}{90}$$

$$90(b-a) = 90\left(\frac{49}{90} - \frac{41}{90}\right) = 90 \times \frac{8}{90} = 8$$

در نتیجه:

۴۹

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

فضای نمونه: تعداد افراد مجرد

۵۰

$$\begin{array}{l} \text{زن} \\ \text{مرد} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{مجرد} \rightarrow \frac{1}{100} \\ \text{مجرد} \rightarrow \frac{4}{100} \end{array} \right. \quad \text{احتمال مجرد بودن} = \frac{60}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{220}{10000} = 0.022$$

حال احتمال این که فرد انتخابی مرد مجرد باشد را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{40}{100} \times \frac{4}{100} = 0.016 \Rightarrow P = \frac{0.016}{0.022} = \frac{8}{11}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

اجتماع ۳ پیشامد را داریم که دوبه‌دو ناسازگارند. پس:

۵۱

$$A_1 = \overline{ab} + \text{نفر } 5:6!2! \quad A_2 = \overline{axb} + \text{نفر } 4:5! \times \binom{x}{5} \times 2!^{\overline{ab}} \quad A_3 = a + \text{نفر } \overline{5} + b:2!5!^{\overline{ab}}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{6!2! + 5! \times 5 \times 2! + 5!2!}{7!} \xrightarrow{+5!} \frac{6(2) + 5(2) + 2}{7 \times 6} = \frac{24}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۲

$$n(S) = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

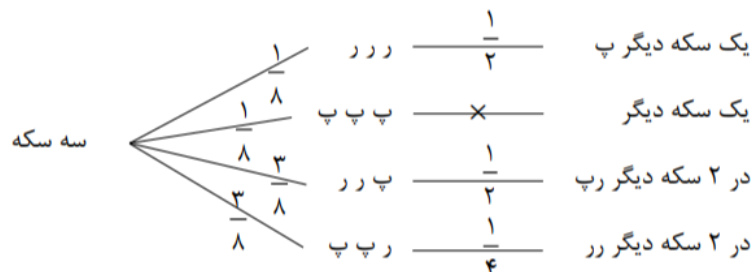
$$n(A) = \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{5}{\text{زوج}} + \frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{5}{\text{زوج}} \times \frac{5}{\text{فرد}} = 225$$

پس:

$$P = \frac{225}{900} = \frac{1}{4}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۳



$$P = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (\circ) + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2+6+3}{32} = \frac{11}{32}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۴

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نکته: احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند را با $P(A \cup B)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

به کمک اطلاعات مسئله، داریم:

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{5}{8}, \quad P(A|B) = \frac{4}{5}$$

اکنون با توجه به نکات، داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{19}{24}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۵۵

فرض می‌کنیم در پرتاب n ام به حالت مطلوب یعنی ۳ بار رو آمدن سکه برسیم، پس در $n - 1$ پرتاب قبلی ۲ بار سکه رو آمده است. بنابراین داریم:

$$\underbrace{\text{پرتاب } n-1}_{\downarrow \text{سکه دو بار رو آمده است.}} \times \underbrace{\text{پرتاب } n\text{ ام}}_{\downarrow \text{سکه رو آمده است.}} = \frac{1}{2}$$

در $\binom{n-1}{2}$ حالت، سکه می‌تواند رو ظاهر شود و احتمال رو آمدن $\frac{1}{2}$ است. از طرفی احتمال پشت آمدن سکه نیز $\frac{1}{2}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{احتمال مطلوب} = \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \times \frac{1}{2} = \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{3}{16} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۵۶

اگر احتمال قبولی نگار در آزمون تستی برابر $P(G)$ و احتمال شرکت کردن او در کلاس تقویتی برابر $P(T)$ باشد، طبق فرض سؤال داریم:

$$P(G) = \frac{1}{5}, P(T) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(G|T) = \frac{3}{7}$$

بنابراین:

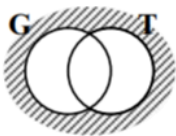
$$P(G|T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{P(G \cap T)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(G \cap T) = \frac{1}{7}$$

اکنون حاصل $P(G \cup T)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(G \cup T) = P(G) + P(T) - P(G \cap T) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{41}{105}$$

احتمال اینکه نگار نه در آزمون قبول شود و نه در کلاس تقویتی شرکت کند، برابر است با:

$$P(G \cup T)' = 1 - P(G \cup T) = 1 - \frac{41}{105} = \frac{64}{105}$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۵۷

گام اول: ابتدا فضای نمونه جدید را طبق شرط احتمال می‌نویسیم. براساس این شرط، مجموع دو مهره خارج شده که ممکن است هر دو سبز یا هر دو قرمز یا یکی سبز و دیگری قرمز باشد، برابر ۵ است. اگر مهره‌ها را به صورت $1^G, 2^G, 3^G, 4^R, 5^R$ نام‌گذاری کنیم، آن‌گاه فضای نمونه جدید به صورت زیر می‌باشد.

$$B = \{(1^R, 4^R), (2^R, 3^R), (2^G, 3^G), (1^G, 4^R), (2^G, 3^R), (2^R, 3^G)\} \Rightarrow n(B) = 6$$

گام دوم: حالا باید در این فضای نمونه جدید، تعداد حالت‌های مربوط به هم‌رنگ بودن دو مهره را بنویسیم که این پیشامد به صورت $A = \{(1^R, 4^R), (2^R, 3^R), (2^G, 3^G)\}$ می‌باشد؛ یعنی $n(A) = 3$ است.

گام سوم: بنابراین برای محاسبه احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره خارج شده به شرط آن‌که مجموع دو مهره برابر ۵ باشد از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم؛ یعنی:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا باید تعداد عضوهای فضای نمونه را به دست آوریم، بنابراین اگر تعداد عضوهای فضای نمونه S را $n(S)$ بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{n(S)}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{n(S)}$$

گام دوم: از آنجایی که دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ است، پس:

$$\begin{aligned} A \cap B = \{2, 3\} &\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{n(S)} \\ \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) &\Rightarrow \frac{2}{n(S)} = \frac{4}{n(S)} \times \frac{5}{n(S)} \Rightarrow n(S) = 10 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

گام سوم: براساس شرط احتمال، باید حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ ندهد، پس باید $P(A' \cup B')$ محاسبه شود. از طرفی احتمال

رخدادن پیشامد A به شرط آن که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ ندهد، به صورت $P(A | A' \cup B')$ می باشد که طبق رابطه احتمال

$$P(A | A' \cup B') = \frac{P(A \cap (A' \cup B'))}{P(A' \cup B')}$$

شرطی خواهیم داشت:

برای محاسبه $P(A \cap (A' \cup B'))$ به صورت زیر عمل می کنیم که در آن چون A و B مستقل اند، پس A و B' نیز مستقل هستند.

$$P(A \cap (A' \cup B')) = P(\underbrace{(A \cap A') \cup (A \cap B')}_{\emptyset}) = P(A \cap B') = P(A).P(B') = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

گام چهارم: برای محاسبه $P(A' \cup B')$ طبق قانون دمورگان خواهیم داشت:

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

گام پنجم: در نهایت با جای گذاری مقادیر به دست آمده در رابطه احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$P(A | A' \cup B') = \frac{P(A \cap (A' \cup B'))}{P(A' \cup B')} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا تعداد عضوهای فضای نمونه را با انتخاب ۳ کارت از بین ۶ کارت موجود به صورت ترکیب ۳ از ۶ می نویسیم، یعنی:

$$n(S) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

گام دوم: برای به دست آوردن تعداد عضوهای پیشامد مطلوب، یعنی ساختن عدد سه رقمی مضرب ۵، با توجه به اعداد موجود، یکان عدد مورد نظر فقط

می تواند ۵ باشد و از طرفی چون ارقام به شکل صعودی باید در کنار هم باشند، بنابراین دو رقم دهگان و صدگان باید از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ انتخاب

شود، پس:

$$-, -, 5 \Rightarrow n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

گام سوم: حالا از تقسیم تعداد حالات مطلوب به تعداد کل حالات، احتمال مورد نظر را به دست می آوریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: چون داخل کیسه ۵ توپ وجود دارد، پس احتمال این که توپ اول دارای شماره ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد برابر $\frac{1}{5}$ است.

گام دوم: حال اگر شماره توپ اول، ۱ یا ۲ باشد، آن گاه مجموع شماره‌های توپ‌های دوم و سوم نمی‌تواند برابر با آن‌ها باشد. اگر شماره توپ اول، ۳ باشد برای این که مجموع شماره‌های توپ دوم و سوم برابر ۳ شود، باید یکی از آن‌ها شماره ۲ و دیگری شماره ۱ باشد؛ بنابراین احتمال این که توپ دوم ۱ باشد $\frac{1}{4}$ و توپ سوم ۲ باشد $\frac{1}{4}$ است. همین‌طور احتمال این که توپ دوم ۲ باشد $\frac{1}{4}$ و توپ سوم ۱ باشد $\frac{1}{4}$ است؛ پس احتمال

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \times 2 = \frac{1}{30}$$

این که توپ اول ۳ باشد و توپ‌های دوم و سوم، ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ باشند، برابر است با:

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \times 2 = \frac{1}{30}$$

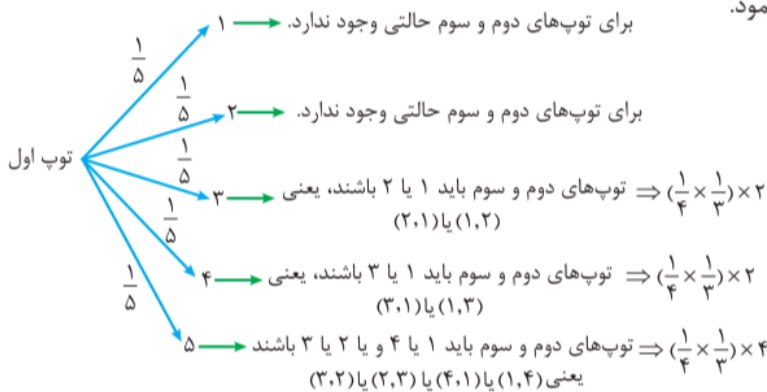
و ۳ باشند که احتمال آن نیز برابر است با:

در انتها اگر شماره توپ اول، ۵ باشد برای این که مجموع شماره‌های توپ‌های دوم و سوم برابر ۵ باشد باید شماره‌های آن‌ها ۱ و ۴ یا ۲ و ۳ باشد

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \times 2 = \frac{1}{30}$$

که احتمال آن برابر است با:

گام سوم: برای توضیحات داده‌شده می‌توان نمودار درختی نیز ترسیم نمود.



$$P(A) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

گام چهارم: بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: تعداد اعداد $1, 2, \dots, 2n+1$ ، عددی فرد است که شامل n عدد زوج و $n+1$ عدد فرد است. احتمال این که فقط

عدد دوم فرد باشد به این معنی است که عدد اول زوج است و عدد دوم فرد است که این احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A) = (\text{احتمال فرد بودن عدد دوم و احتمال زوج بودن عدد اول}) = \frac{n}{2n+1} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow n=15$$

گام دوم: حالا می‌خواهیم از بین اعداد $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ با در نظر گرفتن $n=15$ یعنی $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$ دو عدد بدون جای گذاری انتخاب کنیم که فقط عدد دوم بر ۵ بخش پذیر باشد، یعنی عدد اول بر ۵ بخش پذیر نباشد و عدد دوم بر ۵ بخش پذیر باشد، پس عدد دوم از بین اعداد $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ انتخاب می‌شود.

احتمال این که عدد اول انتخاب شده بر ۵ بخش پذیر نباشد برابر است با انتخاب ۲۵ عددی که بر ۵ بخش پذیر نیستند از بین ۳۱ عدد کل یعنی $\frac{25}{31}$.

همچنین احتمال این که عدد دوم انتخاب شده بر ۵ بخش پذیر باشد برابر است با انتخاب ۶ عدد بخش پذیر بر ۵ از بین ۳۰ عدد باقی مانده یعنی $\frac{6}{30}$.

گام سوم: بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

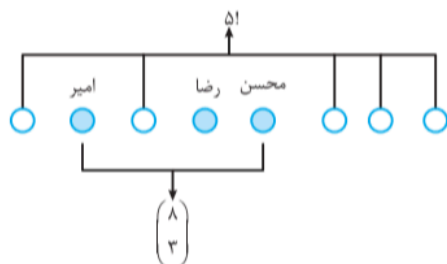
$$P(B) = (\text{احتمال بخش پذیر بودن عدد دوم بر ۵ و احتمال بخش پذیر نبودن عدد اول بر ۵}) = \frac{25}{31} \times \frac{6}{30} = \frac{5}{31}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا برای به دست آوردن فضای نمونه، باید سه جایگاه برای رضا، محسن و امیر از بین سه جایگاه موجود انتخاب کنیم و همین‌طور جایگشت

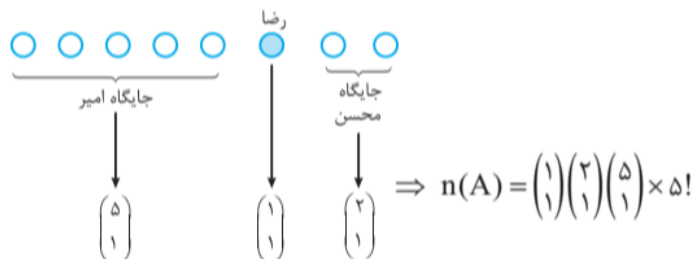
$$n(S) = \binom{8}{3} \times 5!$$

۵ نفر دیگر را در نظر بگیریم؛ پس:



گام دوم: حالا پیشامد مطلوب آن است که رضا از نظر سن در رتبه سوم قرار بگیرد، بنابراین محسن می‌تواند جایگاه اول یا دوم را داشته باشد

و امیر می‌تواند جایگاه چهارم، پنجم، ششم، هفتم یا هشتم را داشته باشد، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: (دقت کنید که در این حالت نیز باید جایگشت پنج نفر دیگر را لحاظ کرد)



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1} \times 5!}{\binom{8}{3} \times 5!} = \frac{2 \times 5}{8 \times 7 \times 6} = \frac{2 \times 5}{8 \times 7} = \frac{5}{28}$$

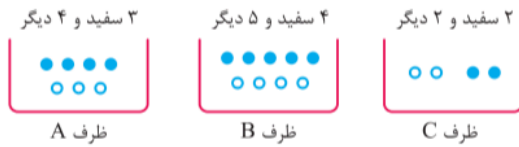
گام سوم: بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

@LoPRax_KonKour

۶۴



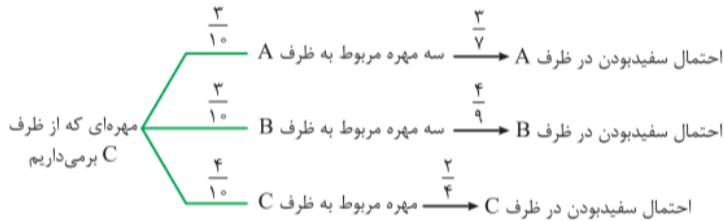
گام اول: با توجه به این که سه ظرف A، B و C به صورت مقابل می باشند:

اگر سه مهره از ظرف A و سه مهره از ظرف B برداریم و در ظرف C قرار دهیم و سپس از ظرف C یک مهره برداریم، احتمال سفیدبودن مهرهٔ اخیر، در حالتی که سه مهره مربوط به ظرف A باشد، برابر است با $\frac{3}{10} \times \frac{3}{7}$ ، در حالتی که سه مهره مربوط به ظرف B باشد برابر است با $\frac{3}{10} \times \frac{4}{9}$

و در حالتی که مهره مربوط به ظرف C باشد برابر است با $\frac{4}{10} \times \frac{2}{4}$ ، وضعیت جدید ظرف C نیز به صورت مقابل است.



گام دوم: برای توضیحات بالا می توان نمودار درختی به صورت زیر نیز رسم نمود:



گام سوم: از جمع احتمالات مربوط به سه حالت گفته شده، احتمال مورد نظر حاصل می شود.

$$P = \frac{3}{10} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{70} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{27+28+42}{210} = \frac{97}{210}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۵

اگر رقم های عدد موردنظر متمایز باشند، باید یکی از گروه های زیر باشند:

$$\{2, 4, 6\}, \{2, 6, 7\}$$

با هر کدام از گروه ها، ۳! عدد سه رقمی می توان نوشت که مجموعاً ۱۲ عدد می شود.

اگر عدد موردنظر دو رقم یکسان داشته باشد باید رقم ها یکی از گروه های زیر باشند:

$$\{4, 4, 7\}, \{4, 7, 7\}$$

با رقم های هر گروه ۳ عدد سه رقمی می توان نوشت که مجموعاً ۶ عدد می شود.

اگر عدد موردنظر سه رقم یکسان داشته باشد حتماً بر ۳ بخش پذیر می شود که تعداد این اعداد ۴ تا است.

بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با:

$$12 + 6 + 4 = 22$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۶۶

تعداد کل حالت های ممکن 6^8 است.

اگر بخواهیم برای بار سوم در پرتاب پنجم ۶ ظاهر شود، باید فقط دو پرتاب از پرتاب های اول تا چهارم ۶ آمده باشند. در پرتاب های ششم تا هشتم هر عددی از ۱ تا ۶ می تواند ظاهر شود. بنابراین تعداد حالت های رخ دادن پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times 1 \times 1 \times \underbrace{5 \times 5}_{\text{پرتاب پنجم}} \times 1 \times \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{پرتاب های ششم تا هشتم}} = \binom{4}{2} \times 5^2 \times 6^3$$

دو پرتاب ۶ آمده

بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{4}{2} \times 5^2 \times 6^3}{6^8} = \frac{6 \times 25}{6^5} = \frac{25}{1296}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۶۷

اگر پیشامد قبولی فرد در امتحان ادبیات را با A و پیشامد قبولی او در ریاضی را با B نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{6}, P(B|A') = \frac{1}{8}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B \cap A')}{1 - P(A)} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{P(B \cap A')}{1 - \frac{1}{4}}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow P(B \cap A') = \frac{3}{32} \Rightarrow P(B - A) = \frac{3}{32}$$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(B - A) = \frac{1}{6} - \frac{3}{32} = \frac{7}{96}$$

در نتیجه احتمال این که این فرد حداقل در یکی از دو امتحان قبول شود برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{7}{96} = \frac{11}{32}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۶۸

اگر فرض کنیم $P(B) = x$ ، آن‌گاه:

$$2P(A) + 6x = 4 \Rightarrow P(A) = -2x + \frac{4}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = -2x + \frac{4}{3} + x - x(-2x + \frac{4}{3}) = 2x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$$

در این صورت:

$$2\left(\frac{4}{3} - 2x\right)^2 - \frac{7}{3}\left(\frac{4}{3} - 2x\right) + \frac{4}{3} = \frac{47}{72}$$

بنابراین کمترین مقدار $P(A \cup B)$ به ازای $x = -\frac{\frac{7}{3}}{2 \times 2} = \frac{7}{12}$ به دست می‌آید و برابر است با:

توجه کنید که در این صورت $P(B) = \frac{7}{12}$ و $P(A) = \frac{1}{6}$.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)